

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Lutschvergnügen

Ein Bonbon löst sich beim Lutschen im Mund erfahrungsgemäß langsam auf. Aber wie genau verändert sich eigentlich die Größe eines Bonbons mit der Zeit? Betrachte ein kugelförmiges Bonbon mit einem homogenen Aufbau, das in einer großen Menge Flüssigkeit liegt.

a) Begründe mit Hilfe geeigneter Annahmen, dass sich der Bonbondurchmesser beim Auflösen linear mit der „Lutschzeit“ ändert.

Das Auflöseverhalten sollst du auch experimentell untersuchen. Besorge dir dazu einige möglichst kugelförmige Bonbons mit einem homogenen Aufbau.

b) Lege eines der Bonbons in ein größeres Gefäß mit Wasser und untersuche, wie sich dessen Größe mit der Zeit bis zur vollständigen Auflösung ändert. Beschreibe deinen Versuchsaufbau und erstelle eine Tabelle mit Messwerten für den Durchmesser des Bonbons als Funktion der Zeit*.

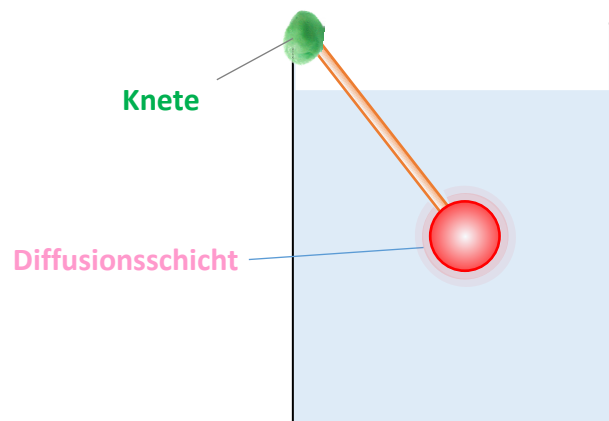
c) Fertige einen Graphen für den Durchmesser des Bonbons als Funktion der Zeit an und überprüfe, inwieweit sich der erwartete lineare Verlauf experimentell bestätigen lässt. Gib dazu mögliche Fehlerquellen bei deinen Messungen an.

*Die Form des Bonbons wird sich während des Auflösens ändern, so dass du den Durchmesser geeignet mitteln musst.

a) Theorie

Erklärung:

Logische Grundannahme: An einer Grenzschicht aus Zucker und Wasser können Hydronium- und Hydroxidionen (Ionen der Autodissoziation des Wassers) bei konstantem Konzentrationsgefälle in gleicher Zeit stets gleich tief eindringen. Daraus folgt, dass die Schrumpfung des Durchmessers linear mit der Zeit erfolgen muss.



Mathematische Herleitung:

Bleibt die Zuckerkonzentration in der Lösung durch ausreichende Durchmischung und einen großen Wasservolumen konstant, bestimmt ausschließlich die Kontaktfläche die abgelöste Zuckermenge. Der Masseverlust pro Zeit ist dann $\dot{m}$. Die Dissoziations- und Diffusionsgeschwindigkeit der Ionen bilden hier mit anderen Parametern eine Konstante c .

Lösegeschwindigkeit: $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -c A \quad (1)$

Masse des Lollis: $m = \rho V$

Volumen des Lollis: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Oberfläche des Lollis: $A = 4 \pi r^2 \quad (2)$

Bilde Funktion $m = f(A)$: $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \rho \frac{4}{3} \pi \left[\frac{A}{4\pi} \right]^{3/2} = \frac{\rho}{6 \sqrt{\pi}} A^{3/2}$

Der Massenverlust in Abhängigkeit der Fläche: $\frac{dm}{dA} = \frac{3}{2} \frac{\rho}{6 \sqrt{\pi}} \sqrt{A} = \frac{\rho}{4 \sqrt{\pi}} \sqrt{A} \quad (3)$

In der Fläche steckt der Radius. Um also den Zusammenhang zwischen Radius und Zeit zu erhalten, muss ich (1) und (3) über dm gleichsetzen:

$$c A dt = \frac{\rho}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{A} dA \rightarrow -c 4 \sqrt{\pi} dt = \rho A^{-1/2} dA \quad | \int$$

$$-c 4 \sqrt{\pi} \int_0^t dt = \rho \int_{A_0}^A A^{-1/2} dA$$

$$\text{mit (2)} \rightarrow c 4 \sqrt{\pi} t = 2 \rho \left[A^{1/2} - A_0^{1/2} \right] = 2 \rho 2 \sqrt{\pi} (r - r_0)$$

$$\text{mit } r = d/2 \rightarrow -c t = \rho (r - r_0) \rightarrow d = d_0 - \frac{2 c t}{\rho}$$

b) Experiment

Ein Zeitraffer-Video eines sich auflösenden Lollis ist die beste Methode zur Bestimmung der Auflösungsfunktion $d = f(t)$.

Bedingungen für einen linearen Verlauf:

Für einen linearen Verlauf muss der Konzentrationsunterschied des Zuckers zwischen Lolli und umgebender Wasserschicht konstant bleiben. Dazu sind folgende Maßnahmen gut geeignet:

1. Man achte auf ein ausreichend großes Gefäß, damit man weit von der gesättigten Zuckerlösung entfernt ist.
2. Die Temperatur sollte mit ca. 50°C deutlich höher als die Umgebungstemperatur sein, damit sich im Glas eine schwache Konvektion bilden kann, die dann eine Gradientenbildung der Zuckerkonzentration in der Nähe des Lollis verhindert.
3. Fixierung des Lollis mit Knete, um zu verhindern, dass er auf dem Boden aufliegt

Aufnahme des Videos:



$$\text{timelaps recording: } \frac{1}{60} \frac{\text{frames}}{\text{seconds}} = 1 \frac{\text{frames}}{\text{minute}}$$

$$\text{timelaps replay: } \frac{50}{11,5} \text{ fps} = 4,35 \text{ fps}$$

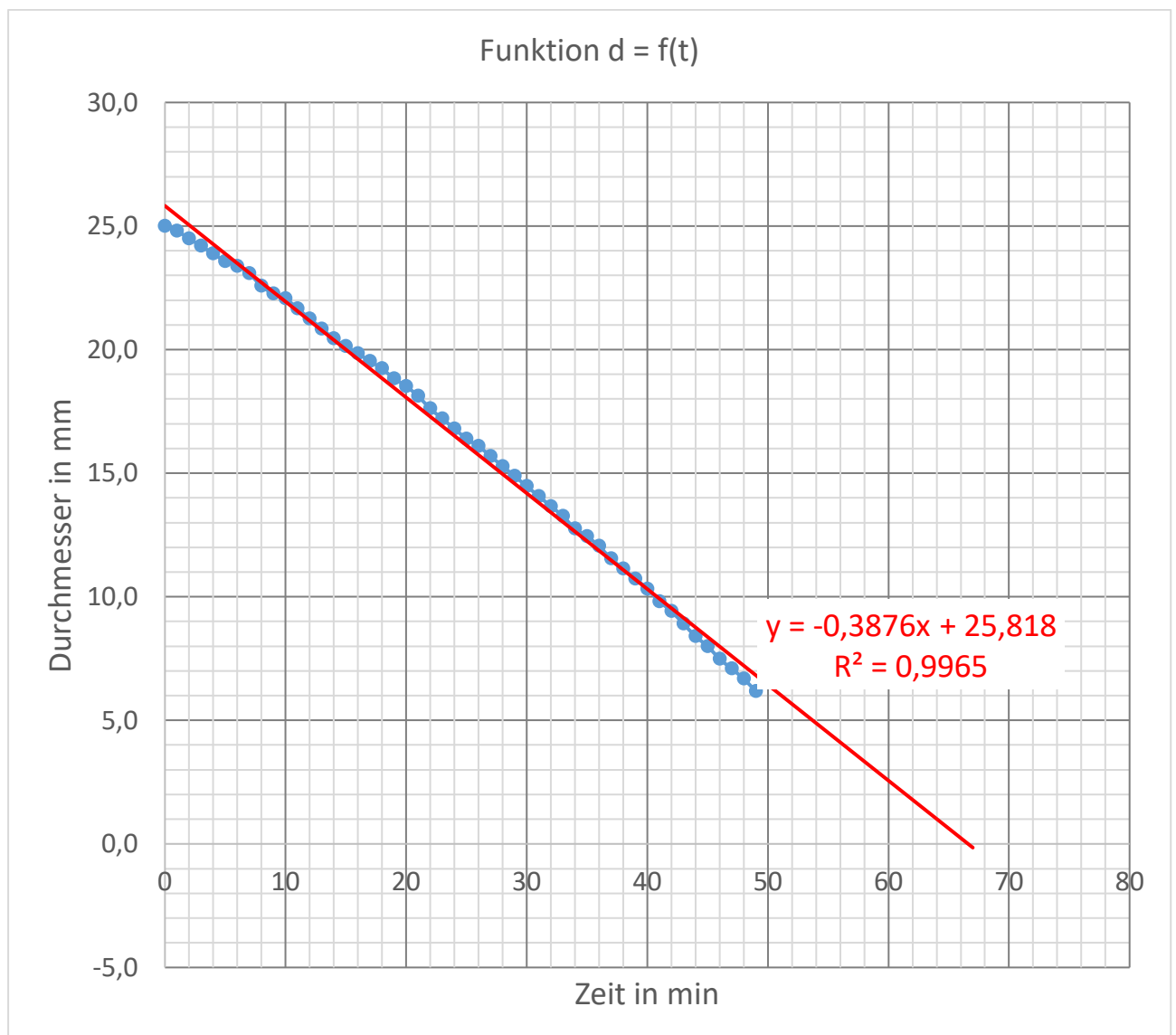
Thanks to Jinzi Mac Huang from NY

Messwerte:Startdurchmesser real: $d = 25 \text{ mm}$ Mittlerer Startdurchmesser auf dem Bildschirm: $D = 235 \text{ mm}$

Frame N°	Elapsed time t in min	Vertical diameter on screen D_v in mm	Horizontal diameter on screen D_h in mm	Average diameter on screen D in mm	Average diameter for real d in mm
1	0	124	123	123,5	25,0
2	1	123	122	122,5	24,8
3	2	122	120	121,0	24,5
4	3	121	118	119,5	24,2
5	4	120	116	118,0	23,9
6	5	119	114	116,5	23,6
7	6	118	113	115,5	23,4
8	7	117	111	114,0	23,1
9	8	115	108	111,5	22,6
10	9	114	106	110,0	22,3
11	10	113	105	109,0	22,1
12	11	112	102	107,0	21,7
13	12	110	100	105,0	21,3
14	13	109	97	103,0	20,9
15	14	107	95	101,0	20,4
16	15	106	93	99,5	20,1
17	16	105	91	98,0	19,8
18	17	104	89	96,5	19,5
19	18	103	87	95,0	19,2
20	19	101	85	93,0	18,8
21	20	100	83	91,5	18,5
22	21	99	80	89,5	18,1
23	22	96	78	87,0	17,6
24	23	95	75	85,0	17,2
25	24	93	73	83,0	16,8
26	25	91	71	81,0	16,4
27	26	90	69	79,5	16,1
28	27	88	67	77,5	15,7
29	28	87	64	75,5	15,3
30	29	85	62	73,5	14,9
31	30	83	60	71,5	14,5
32	31	81	58	69,5	14,1
33	32	80	55	67,5	13,7
34	33	78	53	65,5	13,3
35	34	76	50	63,0	12,8
36	35	75	48	61,5	12,4
37	36	73	46	59,5	12,0
38	37	71	43	57,0	11,5
39	38	69	41	55,0	11,1
40	39	67	39	53,0	10,7
41	40	65	37	51,0	10,3
42	41	63	34	48,5	9,8
43	42	61	32	46,5	9,41

44	43	59	29	44,0	8,91
45	44	56	27	41,5	8,40
46	45	55	24	39,5	8,00
47	46	52	22	37,0	7,49
48	47	50	20	35,0	7,09
49	48	48	18	33,0	6,68
50	49	46	15	30,5	6,17

c) Auswertung (Excel) & Fehlerbetrachtung



Größenverhältnis Screen/Real: $k \approx 5$
 Anstieg der linearen Funktion $d(t)$: $m \approx -0,39 \text{ mm/min}$
 Auflösungszeit des Lollis: $T \approx 66 \text{ min}$
 Bestimmtheitsmaß der Regression: $R^2 = 0,9965 \rightarrow$ sehr gutes Fitting

Vergleich:

THEORIE	EXPERIMENT
$d = d_o - \frac{2 c t}{\rho}$	$d = 25,8 - 0,39 t$

Mit einer Zuckerdichte von $\rho = 1,6 \text{ g/cm}^3 = 1,6 \text{ mg/mm}^3$ und dem Anstiegsbetrag $|m| = 0,39 \text{ mm/min}$ folgt eine Lösegeschwindigkeit von $c = 0,8 \cdot 0,39 \frac{\text{mm} \cdot \text{g}}{\text{min} \cdot \text{mm}^3} = 0,31 \frac{\text{g}}{\text{min} \cdot \text{mm}^2}$

Fehlerbetrachtung:

SYSTEMATISCHE FEHLER

- eine zu schwache Konvektion am Ende (Temperaturausgleich)
→ dämpft die Lösegeschwindigkeit
- die zunehmende Sättigung der Zuckerlösung
→ dämpft die Lösegeschwindigkeit
- Eine ungleichförmige Ablösung der Außenschichten vergrößert die effektive Oberfläche → steigert die Lösegeschwindigkeit
- Zu Beginn des Versuches muss die Anfangsdissoziation die Oberflächenenergie des Lollis überwinden → dämpft die Lösegeschwindigkeit nur am Anfang
- Gegen Ende des Versuches verliert der Lolli seine Kugelgestalt und die Berechnungsformeln für eine Kugel sind nur noch bedingt anwendbar – beide Werte sind jetzt größer als in der Theorie, weil eine Kugel bei definiertem Radius bereits das Flächenminimum aller Körper gleichen Volumens repräsentiert.
→ steigert die Lösegeschwindigkeit im Vergleich zur Theorie

Die letzten drei Fehlerquellen führen zu einem stärkeren Abfall von $d(t)$, die ersten beide zu einem geringeren Abfall der Funktion. Offensichtlich dominieren die Verstärkungseffekte.

ZUFÄLLIGE FEHLER können auf Grund der großen Anzahl von Messwerten praktisch ausgeschlossen werden.